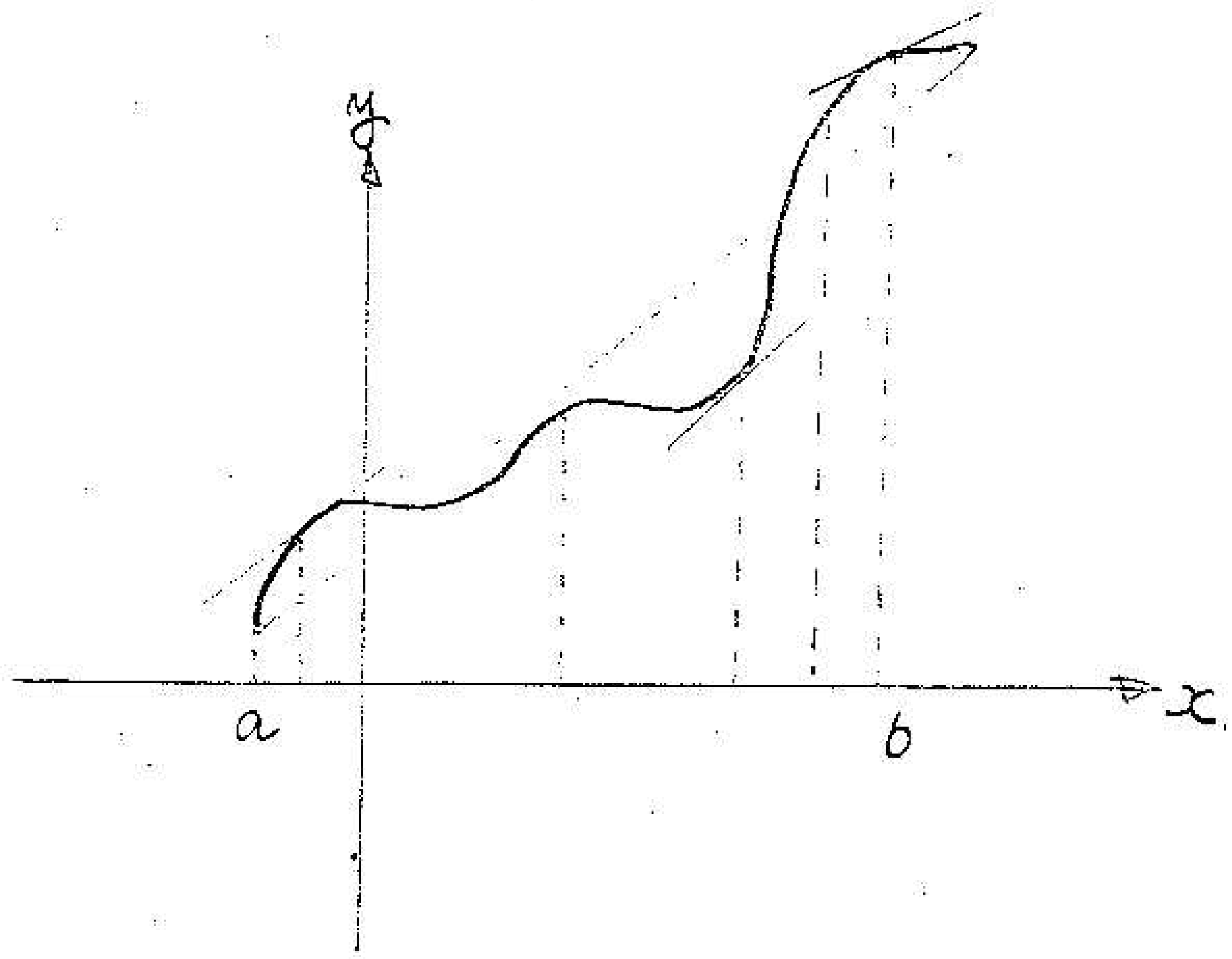
定理 2.6 (Leibniz の定理)

$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + {}_nC_1 f^{(n-1)}g' + {}_nC_2 f^{(n-2)}g'' + \cdots\cdots + {}_nC_r f^{(n-r)}g^{(r)} + \cdots\cdots + fg^{(n)}$$

$${}_nC_r = \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

§11. 平均値の定理



$$c = a + \theta(b-a)$$

$$\theta = \frac{c-a}{b-a}$$

$$k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

で、その方程式は

$$y - f(a) = k(x-a)$$

である。そこで、

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - k(x-a)$$

を考えると $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ で、

$$\varphi'(x) = f'(x) - k$$

である したがって Rolle の定理から、a と b との間に、

$$\varphi'(c) = f'(c) - k = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

となるような c が存在する。すなわち、つぎの定理が成り立つ。

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a+\theta(b-a)) \qquad 0<\theta<1$$

が成りたつような θ が少なくとも1つある。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & \lambda a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \lambda a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & \cdots & \lambda a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \\ \lambda a_{1i} & \lambda a_{2n} & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots \end{vmatrix}$$

2')

i) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

2).
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} - & & - \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \end{vmatrix}$$

5.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+\lambda a_{11} & a_{22}+\lambda a_{12} & \cdots & a_{2n}+\lambda a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \end{vmatrix} =$$

1 行列

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(i)

$$\text{左辺} = \sum_{n!} \operatorname{sgn}(\alpha)\, a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{sgn}(\alpha)\, a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{2p_n} = \operatorname{sgn}(\alpha)\, a_{q_1 1} a_{q_2 2} a_{q_3 3} \cdots a_{q_n n} = \operatorname{sgn}\beta$$

$\to a_{q_1 1} \cdots a_{q_n n}$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & i & \cdots & n \\ p_1 & p_2 & \cdots p_i & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & j & \cdots & n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_j & \cdots & q_n \end{pmatrix}$$

$$a_{i p_i} = a_{q_j j}$$

$$p_i = j$$

$$q_1 = i$$

$$\beta = \alpha^{-1}$$

$$\operatorname{sgn}\beta = \operatorname{sgn}(\alpha^{-1}) = \operatorname{sgn}\alpha.$$

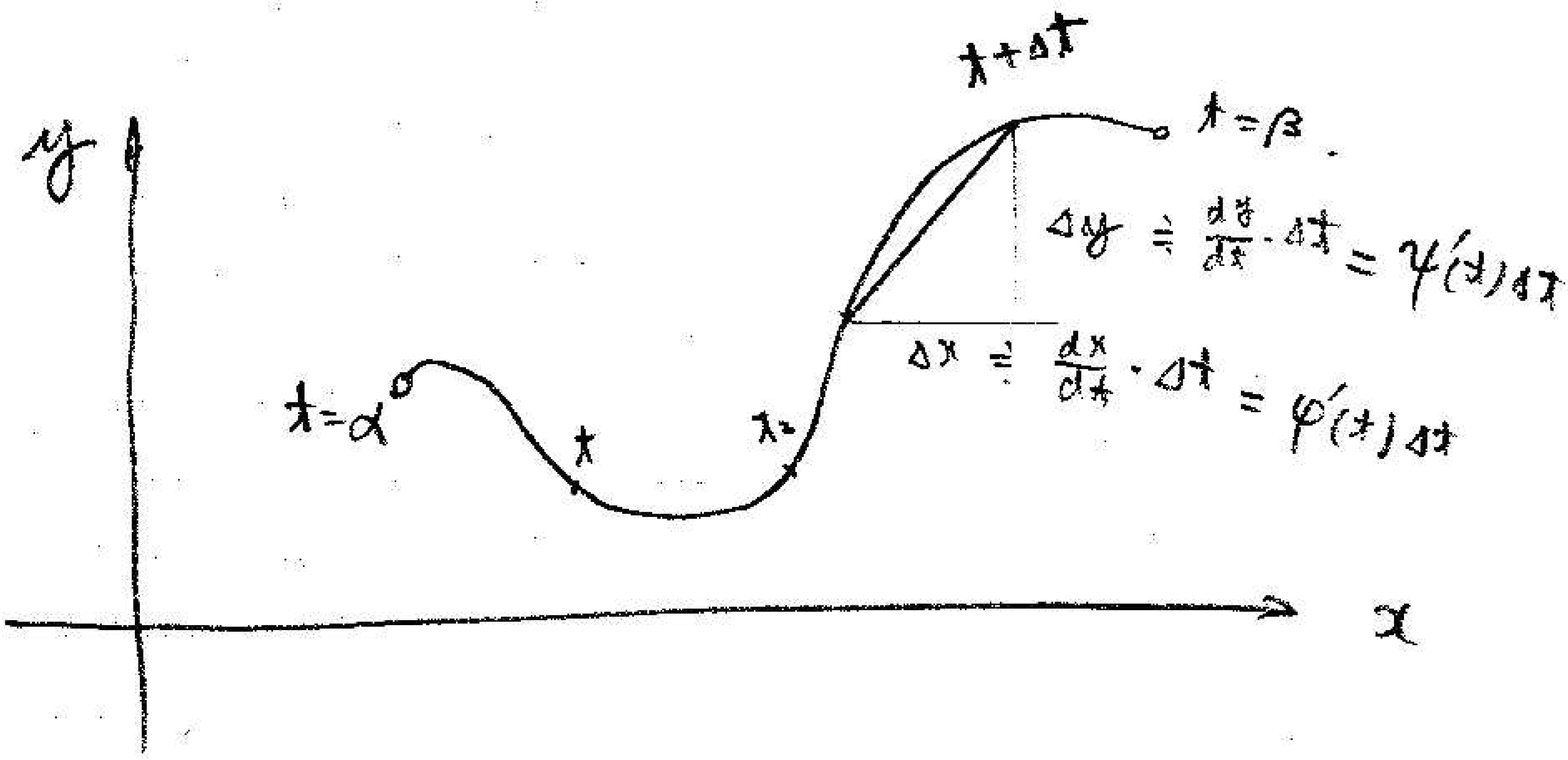
〈媒介変数で表わされた曲線の長さ〉

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	……
x	a	$a/\sqrt{2}$	0	……
y	0	$b/\sqrt{2}$	b	……

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

$\alpha \leq t \leq \beta$



$$\Delta l \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\fallingdotseq \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,\Delta t$$

$$\boxed{l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,dt}$$

(例)

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$$

$0 \leq t \leq 2\pi$.

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2}\,dt$$

$$= a\int_0^{2\pi} dt$$

$$= a\left[t\right]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi a.$$

合成関数の偏微分法

$z = f(x, y)$　　$x = \varphi(t)$　　$y = \psi(t)$ のとき

$\dfrac{dz}{dt}$ を求める。

全微分可能とは

$f(x)$ が $x = a$ で　微分可能 $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が存在する。

即ち $f(a+h) - f(a) = Ah + h\varepsilon(h)$ とおいて

$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ となるようにできること

$z = f(x, y)$

$f(a+h, b+k) - f(a, b)$

$= Ah + Bh + \sqrt{h^2 + k^2}\ \varepsilon(h, k)$

とおいた時

$\lim_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \varepsilon(h, k) = 0$ となるようにできること.

$z = f(x, y)$

$f(a+h, b+k) - f(a, b)$

$= Ak + Bk + \sqrt{h^2 + k^2}\ \varepsilon(h, k)$

とおいた時.

$\lim_{\substack{k \to 0 \\ h \to 0}} \varepsilon(h, k) = 0$　となるようにできる時.

$f(x, y)$ は (a, b) で 全微分可能 ~~な~~ であるという。

$$\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=A+\varepsilon \xrightarrow[h\to 0]{} A$$

$A=f_x(a,b)$

同様にして.

$B=f_y(a,b)$

$\Delta z=f(a+h,b+k)-f(a,b)$

合成関数の偏微分法

定理. $z=f(x,y)$ が全微分可能で $x=\varphi(t)$ $y=\psi(t)$ が t について微分可能である時.

合成関数 $z=f(\varphi(t),\psi(t))$ は t について微分可能で

$$\frac{dz}{dt}=f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+f_y(\varphi(t)\cdot\psi(t))\psi'(t)$$ となる.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

・証明)

$\varphi(t)$ $\psi(t)$ は微分可能

$\varphi(t+\delta)-\varphi(t)=h$

$\psi(t+\delta)-\chi(t)=k$ とおくと

$h/\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} \varphi'(t)$ $\quad k/\delta \xrightarrow[\delta\to 0]{} \chi'(t)$

また $f(x,y)$ が全微分可能だから

$$\frac{f(\varphi(t)+h,\ \psi(t)+k)-f(\varphi(t),\ \psi(t))}{\delta}$$

$$= f_x(\varphi(t),\psi(t))\frac{h}{\delta}+f_y(\varphi(t),\psi(t))\frac{k}{\delta}+\sqrt{\left(\frac{h}{\delta}\right)^2+\left(\frac{k}{\delta}\right)^2}$$

とかけて. $\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\varepsilon(h,k)=0$ である。

故に $\delta\to 0$ とした時

$$\frac{h}{\delta}\longrightarrow\varphi'(t)\qquad\frac{k}{\delta}\longrightarrow\psi'(t)$$

$$\sqrt{\left(\frac{h}{\delta}\right)^2+\left(\frac{k}{\delta}\right)^2}\quad\varepsilon(h,k)=\sqrt{\varphi'(t)^2+(\psi'(t))^2}$$

$\varepsilon(h,k)\to 0$

$\therefore$ 左辺 $=\dfrac{dz}{dt}$

右辺 $= f_x(\varphi(t)\ \psi(t))\ \varphi'(t)+f_y(\varphi(t),\ \psi(t))\ \psi'(t)$

定理 $z=f(u,v)$ が全微可能で

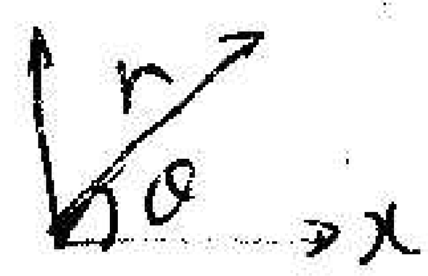
$u(x,y)$ $v(x,y)$ が偏微分可能である時

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$z = f(x, y)$ $x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$



この時、

1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$

2) $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$ となる。

問題

$z = f(x+at) + g(x-at)$ の時

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ であることを証明せよ。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x+at) + g'(x-at)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(x+at) + g''(x-at)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = af'(x+at) - ag'(x-at)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 f''(x+at) + a^2 g''(x-at)$$

$$= a^2\left\{f''(x+at) + g''(x-at)\right\}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

問題

次の重積分を求めよ。

1) $\int_a^b\int_c^d xy\,dy\,dx = \int_a^b \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_c^d dx = \int_a^b \left(\frac{d^2}{2}x - \frac{c^2}{2}x\right) dx$

$= \frac{1}{2}\int_a^b x(d^2-c^2)\,dx = \frac{1}{2}(d^2-c^2)\left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b$

$= \frac{1}{4}(d^2-c^2)(b^2-a^2)$

2) $\int_0^1\int_0^{x^2} x\,dy\cdot dx = \int_0^1 \left[xy\right]_0^{x^2} dx = \int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

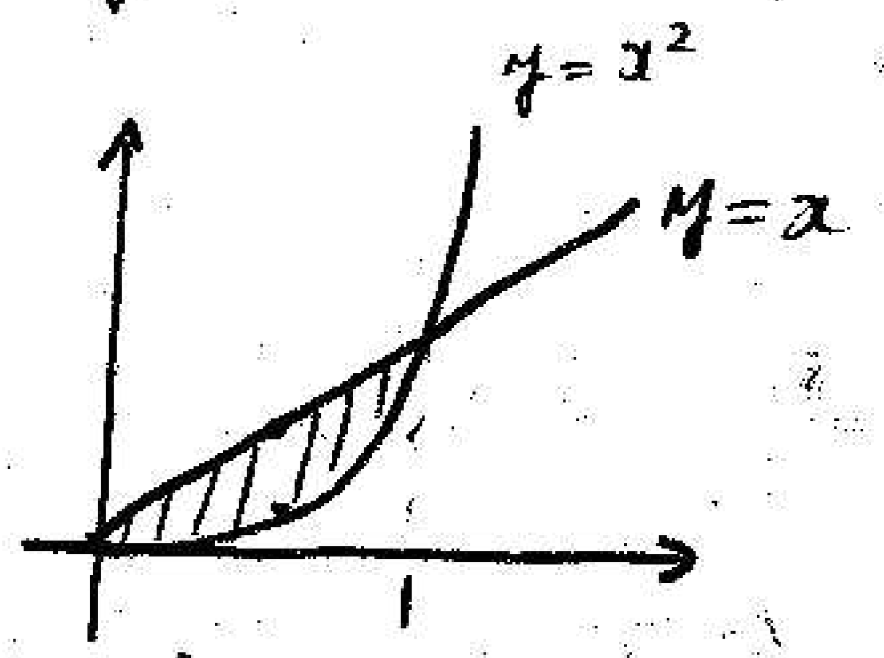
3) $\int_0^1\int_0^{x^2} dy\,dx = \int_0^1 \left[y\right]_0^{x^2} dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

4) $\int_0^{1/\sqrt{2}}\int_x^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy\,dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_x^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} x\{(1-x^2)-x^2\}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} x - \int_0^{1/\sqrt{2}} x^3\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{1/\sqrt{2}} - \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^{1/\sqrt{2}}$

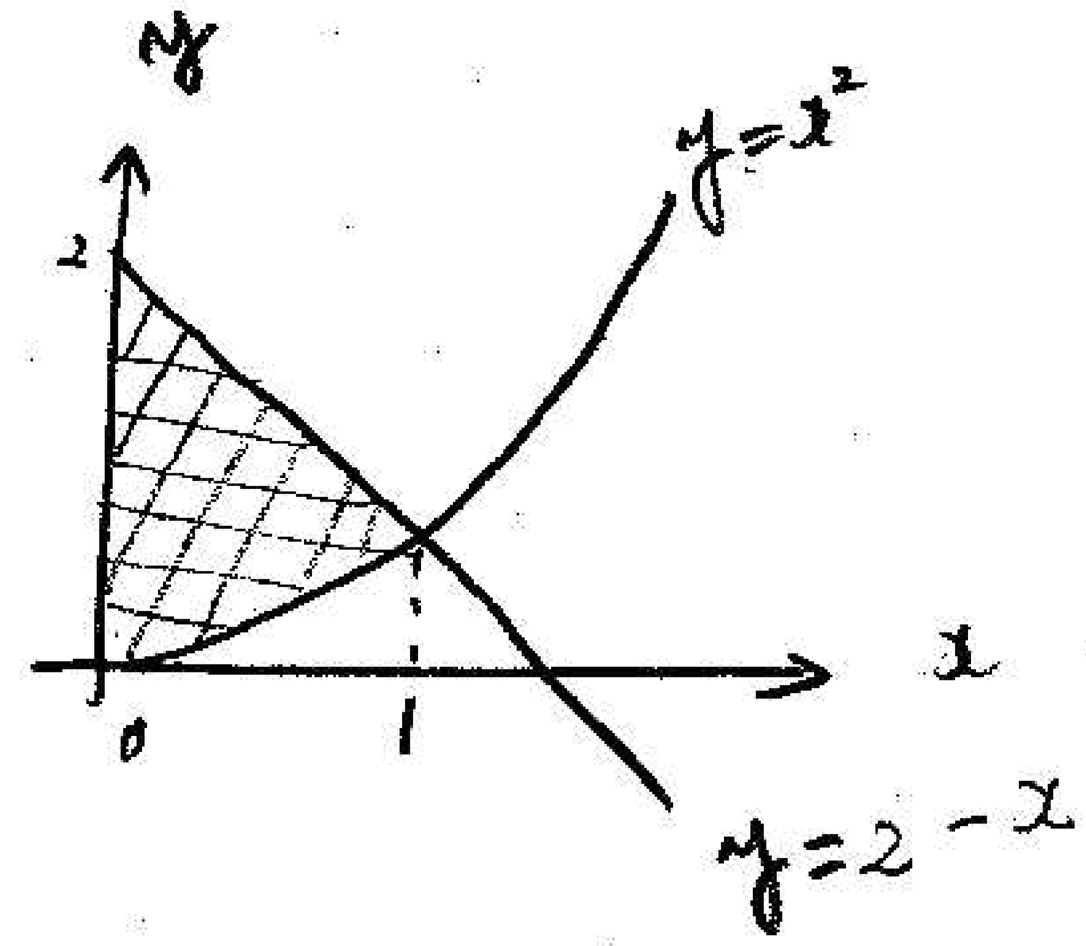
$\iint xy\,dy\cdot dx$ を次の領域で重積分せよ。 $= \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$

1)



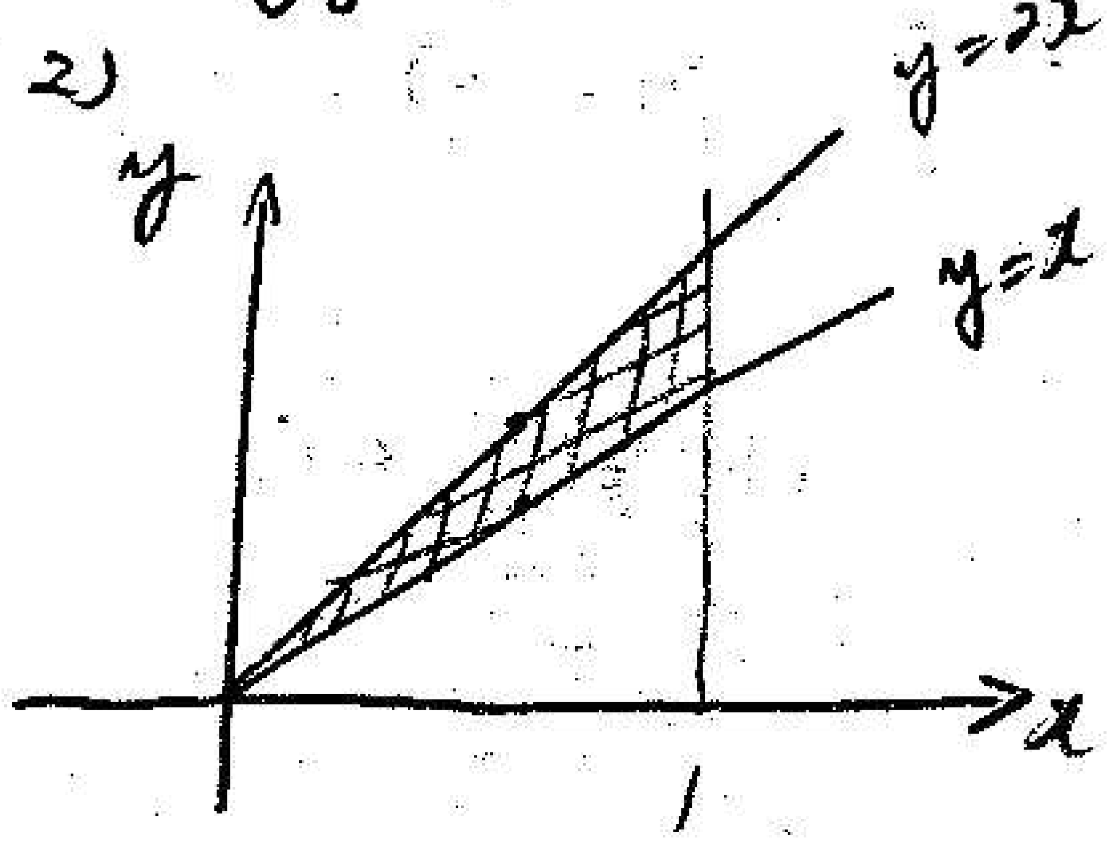
$\int_0^1\int_x^{x^2} xy\,dy\,dx.$

3)



$\int_0^1\int_{x^2}^{2-x} xy\,dy\,dx.$

2)



$\int_0^1\int_x^{2x} xy\,dy\,dx$